# **Решения задач муниципального этапа всероссийской олимпиады по математике РТ, ноябрь 2018**

## 8 класс

**8-1**. На именины бабушки Зины пришло 16 гостей. Оказалось, что присутствующие съели 130 конфет, причем девочки съели по 13 штук, мальчики – по 5, взрослые гости – по 4, а сама бабушка Зина – 17. Сколько было среди гостей девочек, мальчиков и взрослых?

**Ответ**. 5, 4 и 7 гостей.

**Решение**. Обозначим число девочек через k, мальчиков – m. Тогда условие задачи можно записать в виде 13k + 5m + 4(16 – k – m) + 17 = 130. После упрощения равенство приобретает вид m = 49 – 9k. При этом число взрослых гостей равно 16 – k – (49 – 9k) = 8k – 33. Числа 49 – 9k и 8k – 33 неотрицательны, то есть , так что k может быть равно только 5.

**Критерии**. Ответ без обоснования – 1 балл. Ограничения на число гостей в группе – 3 балла. За полное решение задачи 7 баллов.

**8-2**. Миша задумал число n и сообщил его 10 друзьям. Первый из них рассказал, что n делится на все числа от 1 до 10, второй объявил, что оно делится на все числа от 2 до 10, третий — на все числа от 3 до 10, и так далее. Наконец, 10-й друг сообщил, что оно делится на 10. Могло ли оказаться, что ровно пятеро друзей сказали правду?

**Ответ:** Нет, не могло.

**Решение**. Предположим, что пятеро друзей сказали правду. Если какой-то друг сказал правду, то все последующие друзья также правы. Значит эти пятеро – друзья с номерами 6, 7, 8, 9, 10. По словам шестого друга, n делится на 6, 7, 8, 9 и 10. Но тогда оно делится и на все числа, меньшие 6, то есть правы все 10 друзей.

**Критерии.** Указано, какие именно пятеро друзей правы – 3 балла. За полное решение задачи 7 баллов.

**8-3**. Нечетные числа m и n взаимно просты. Найдите НОД чисел m + n и m2 + n2.

**Ответ:** 2.

**Решение**. Пусть оба числа m + n и m2 + n2 делятся на d. Тогда на d делится также число (m – n)(m + n) = m2 – n2. Значит, d будет делителем чисел (m2 + n2) – (m2 – n2) = 2n2 и (m2 + n2) + (m2 – n2) = 2m2. Но по условию у чисел m и n нет общих делителей, так что d – делитель числа 2. Заметим также, что числа m + n и m2 + n2 – четные, так что НОД(m + n, m2 + n2) = 2.

**Критерии.** Если НОД вычислен только для конкретных пар (m, n) – 0 баллов. Если показано что НОД есть делитель числа два – 5 баллов. За полное решение задачи 7 баллов.

**8-4**. Найти площадь треугольника, медианы которого равны 12, 15 и 9.

**Ответ**: 72.

**Решение**. Пусть O – точка пересечения медиан. Тогда площадь треугольника AOC составляет одну треть от SABC (у них общие основания, а высоты относятся как 1 : 3). Продолжим медиану BM на отрезок MD = OM. Треугольники OMC и AMD равны по двум сторонам и углу M между ними. Значит, SAOD = SAOC = S.

A

B

C

S2

S2

S1

O

D

M

Стороны треугольника AOD составляют 2/3 от длин медиан, то есть 8, 10 и 6. Это прямоугольный треугольник с гипотенузой 10 и катетами 6 и 8. Площадь его равна S = 6∙8/2 = 24. Искомая площадь в три раза больше S.

**Критерии.**  За полное решение задачи 7 баллов.

**8-5**. Можно ли на окружности расположить числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 так, чтобы сумма любых трёх соседних чисел была больше a) 13; *б*) 11?

**Ответ**. а) нет; б) да.

**Решение.** *а*) Пусть a1, a2, ... , a8 – числа, расставленные на окружности в порядке обхода. Если сумма любых трёх соседних чисел больше 13, то

a1 + a2 + a3 ≥ 14,

a2 + a3 + a4 ≥ 14,

. . . . . . . . . . . . . .

a8 + a1 + a2 ≥ 14.

Складывая эти неравенства, получим 3(a1 + a2 + ... + a8) ≥ 8 · 14 = 112. C другой стороны, a1 + a2 + ... + a8 = 1 + 2 + ... + 8 = 36. Получаем противоречие, 3· 36 ≥ 112.

*б*) Приведём пример требуемого расположения чисел:

a1 = 1, a2 = 5, a3 = 6, a4 = 2, a5 = 4, a6 = 7, a7 = 3, a8 = 8.

**Критерии.** В каждом пункте ответ без обоснования — 0 баллов. Полное решение — *а*) 4 балла; *б*) 3 балла.

# **Решения задач муниципального этапа всероссийской олимпиады по математике РТ, ноябрь 2018**

## 9 класс

**9-1**. Миша задумал трёхзначное число n и сообщил его 10 друзьям. Первый из них рассказал, что n делится на все числа от 1 до 10, второй объявил, что оно делится на все числа от 2 до 10, третий — на все числа от 3 до 10, и так далее. Наконец, 10-й друг сообщил, что оно делится на 10. Миша знает, что из 10 друзей только трое сказали правду. Какое число задумал Миша? Укажите все возможные варианты.

**Ответ:** 360 *или* 720.

**Решение.** Ясно, что задуманное Мишей число n делится на 10, в противном случае все 10 друзей сказали неправду. Аналогично получается, что n кратно 9 и 8, и значит, n делится на их НОК, то есть на 360. Но тогда n обязательно делится на все числа от 1 до 10 и не делится на 7. В этом случае первые 7 друзей ошиблись, а остальные сказали правду. Среди трёхзначных чисел только 360 и 720 делятся на 360.

**Критерии.** Указаны *оба* числа без обоснования — 3 балла. Доказано, что искомое число кратно 360 — 3 балла. За полное решение задачи 7 баллов.

**9-2**. Число умножили на сумму его цифр. Могло ли при этом получиться число 200 ... 0018 (в записи 100 нулей)?

**Ответ**: *нет, не могло*.

**Решение.** Сравним остатки чисел n ⋅ S(n) и 200 ... 0018 при делении на 3. По признаку делимости число и сумма его цифр имеют равные остатки при делении на 3. Значит, произведение n ⋅ S(n) при делении на 3 даёт такой же остаток, что и S2(n). Сумма цифр числа 200 ... 0018 равна 11, и значит, это число при делении на 3 даёт остаток 2. Таким образом, если равенство n ⋅ S(n) = 200 ... 0018 возможно, то S2(n) имеет остаток 2 при делении на 3. Поскольку квадрат любого целого числа при делении на 3 может давать только остаток 0 или 1, требуемое равенство невозможно.

**Критерии.** Только ответ — 0 баллов. Доказано, что квадрат суммы цифр даёт остаток 2 при делении на 3 — 3 балла.

**9-3**. Окружности 1 и 2 пересекаются в точках A и B, причем дуга AB окружности 2 делит площадь окружности 1 пополам. Доказать, что длина этой дуги больше диаметра окружности 1.

**Решение**: Очевидно, что центр O окружности 1 лежит внутри дуги AB (половина площади окружности не может находиться в одном полукруге). Обозначим M точку пересечения диаметра AC с дугой AB. Дуга AM больше хорды AM, Кроме того, длина дуги MB больше отрезка CM. Действительно, построим вспомогательную окружность с центром в точке M радиуса MC. Она целиком лежит внутри окружности 1, значит, MB больше, чем радиус этой окружности.

*B*

*A*

*O*

1

2

*C*

*M*

**Критерии**. Указано положение центра O – 2 балла. За полное решение задачи 7 баллов.

**9-4**. Аня знает, что на дом задали квадратное уравнение вида ax2 + bx + c = 0. Она вспомнила, какие коэффициенты были у этого уравнения (они все положительны), но не помнит, на каком месте стоял каждый из них. На всякий случай она решила все 6 возможных вариантов уравнения и выписала их корни. Какое наибольше количество различных чисел могло быть в полученном списке?

**Ответ**. 8.

**Решение**. Может ли оказаться, что все 6 уравнений имеют корни? Рассмотрим пару уравнений ax2 + bx + c = 0 и cx2 + bx + a = 0. Их дискриминанты совпадают и равны b2 – 4ac. Предположим, что дискриминанты всех 6 уравнений неотрицательны. Это сводится к трем соотношениям:

Перемножим эти три неравенства (это возможно, так как обе части неравенств положительны). Получим, что a2b2c2 ≥ 64a2b2c2, пришли к противоречию.

Итак, одновременно могут выполняться не более двух неравенств из трех, то есть одна пара уравнений корней не имеет. Пусть для определенности выполняются первые два неравенства, тогда . Например, подойдет тройка a = 9, b = 18, c = 1.

Найдем корни уравнений:

,

,

,

,

Все они различны.

**Критерии**. Показано, что корней не более 8 – 5 баллов, приведен пример – 2 балла.

**9-5**. Постройте график соотношения min(|x|, |y|) + 2 max(|x|, |y|) = 1 (график состоит из всех точек (x, y), координаты которых удовлетворяют уравнению).

**Решение**. Заметим, что искомый график симметричен. Действительно, вместе с точкой (x, y) в него входят (–x, y) (симметрия относительно оси Oy), (x, –y) (симметрия относительно Ox) и (y, x) (симметрия относительно прямой y = x). Значит, достаточно рассмотреть случай 0 ≤ y ≤ x . При таких ограничениях уравнение принимает вид y + 2x = 3. График представляет собой отрезок этой прямой. Отражая его относительно всех осей симметрии, получим восьмиугольник.

**Критерии**. Описана симметрия графика – 2 балла, полное решение – 7 баллов.

# **Решения задач муниципального этапа всероссийской олимпиады по математике РТ, ноябрь 2018**

## 10 класс

**10-1**. Петя задумал трёхзначное число n и сообщил его 10 друзьям. Первый из них рассказал, что n делится на все числа от 1 до 10, второй объявил, что оно делится на все числа от 2 до 10, третий — на все числа от 3 до 10, и так далее. Наконец, 10-й друг сообщил, что оно делится на 10. Могло ли оказаться, что хотя бы четверо друзей оказались правы?

**Ответ:** Нет, не могло.

**Решение**. Предположим, что друг номер k – первый из друзей, который сказал правду. Тогда все последующие друзья также правы. Значит, правду сказали 10 – (k – 1) = 11 – k друзей. Условие, что таких не меньше 4, приводится к виду 11 – k ≥ 4, то есть k ≤ 7. В частности, седьмой друг прав. Тогда n делится на 7, 8, 9 и 10, то есть на НОК(7, 8, 9, 10) = 7∙8∙9∙5 = 2520. Значит, задуманное число не может быть трехзначным.

**Критерии.** Разобран только случай, когда ровно четверо друзей правы – 3 балла. Полное решение – 7 баллов.

**10-2**. Числа m и n взаимно просты. Каким может быть НОД чисел m + n и m2 + n2 ?

**Ответ**. 1 или 2.

**Решение**. Пусть d – общий делитель чисел a = m + n и b = m2 + n2. Тогда на d делится также число (m + n)(m – n) = m2 – n2 и числа m2 + n2 + (m2 – n2) = 2n2 и m2 + n2 – (m2 – n2) = 2m2.

В силу взаимной простоты m и n число d – делитель 2, то есть НОД(m, n) равно 1 или 2. Оба случая реализуются. Если числа m, n нечетные, то m + n и m2 + n2 – четные, так что НОД(m + n, m2 + n2) = 2. Если же m, n разной четности, то НОД(m + n, m2 + n2) = 1.

**Критерии**. Если НОД вычислен только для конкретных пар (m, n) – 0 баллов. Если показано что НОД есть делитель числа два – 4 балла. За полное решение задачи 7 баллов.

**10-3**. а) В окружность вписан многоугольник с n = 2017 сторонами. Известно, что все его углы равны. Будут равными его стороны? б) Тот же вопрос, если n = 2018.

**Ответ**: а) да; б) не обязательно.

**Решение**. Обозначим вершины многоугольника через Ai, i =1,…, n. Рассмотрим четыре вершины, идущие подряд, например, A1, A2, A3 и A4. У треугольников A1A2A3 и A2A3A4 углы A1A2A3 и A2A3A4 совпадают по условию задачи, а углы A2A1A3 и A2A4A3– как опирающиеся на одну дугу. Значит, равны треугольники A1A2A3 и A2A3A4 (по общей стороне и двум углам) и, следовательно, A1A2 = A3A4, т.е. стороны равны через одну. Если число сторон нечетно, n = 2017, то A1A2 = A3A4 = … = A2017A1 = … , все стороны равны.



*A2*

*A1*

*A3*

*A4*

Если же n чётно, то стороны могут и не совпадать между собой. Пример можно построить так: возьмем правильный многоугольник с 2018/2 = 1009 сторонами. Повернем его на маленький угол и соединим старые и новые вершины. Получится многоугольник с 2018 сторонами, равными через одну, и равными углами.

**Критерии.** Показано равенство сторон через одну – 3 балла. За полное решение только пункта а) 5 баллов. Приведен пример неправильного многоугольника в п. б) – 2 балла.

**10-4**. Найти наибольшее и наименьшее значения функции sin2x + 2sin x cos x + 3cos2x.

**Ответ:**  и .

**Решение**. Понизим степени слагаемых. Выражение примет вид

Сумму последних двух слагаемых можно переписать в виде . Эта функция принимает значения от до , откуда и получаем ответ.

**Критерии.** Получена формула (1) – 3 балла. Полное решение – 7 баллов.

**10-5**. Пусть a, b, c и d — действительные числа и abcd = 1. Докажите неравенство:

**Решение.** Заметим, что для произвольных p, q, x, y выполняется соотношение (px + qy)2 ≤ (p2 + q2)(x2 + y2) (скалярное произведение векторов не превосходит произведения их длин).

Используя равенство abcd = 1, запишем каждое слагаемое левой части в виде дроби, а затем воспользуемся записанным выше неравенством. Имеем

В правой части оба слагаемых одинаковы. Оценим их сумму с помощью неравенства о средних: 2  ≤ x + y, тогда

что и требовалось доказать.

*Замечание*. Требуемое неравенство можно получить сразу, используя неравенство Коши-Буняковского-Шварца для четырёх чисел:

Отсюда получаем требуемое неравенство. Знак равенства возможен только при условии a= b= c= d= 1.

**Критерии.** За использование неравенства Коши-Буняковского для двух или четырёх чисел без его доказательства баллы не снижаются.

# **Решения задач муниципального этапа всероссийской олимпиады по математике РТ, ноябрь 2018**

## 11 класс

**11-1**. Числа x1 и x2 – различные корни уравнения x2 + px + q = 0, а x1 + 1 и x2 + 1 – корни уравнения x2 – p2x + qp = 0. Найти p и q.

**Ответ**. p = 1, q < 1/4 или p = –2, q = –1.

**Решение**. По теореме Виета имеем x1 + x2 = – p, x1x2 = q, x1 + x2 + 2 = p2, (x1 + 1)(x2 + 1) = pq. Подставляя x1 + x2 и x1x2 из первой пары уравнений во вторую, получаем систему из двух уравнений –p + 2 = p2, q – p + 1 = pq. Первое уравнение имеет два корня.

Если p = 1, второе уравнение превращается в тождество, ему удовлетворяет любое q. Значит, достаточно потребовать, чтобы уравнение x2 + x + q = 0 имело два корня. Для этого дискриминант 1 – 4q должен быть положительным.

Если p = –2, то q + 3 = –2q, откуда q = –1. Уравнение x2 – 2x – 1 = 0 имеет корни.

**Критерии**. Если найден только второй ответ – 3 балла. Если в первом решении не указано ограничение на q – с общей суммы снимаются 2 балла.

**11-2**. Пете и Коле дали два одинаковых картонных треугольника. Каждый из них разрезал свой треугольник на два равных треугольника. Могут ли полученные ими части быть разными?

**Ответ**. Они все одинаковые.

**Решение**. Предположим, что Петя разрезал ABC по отрезку AP. Площади равных треугольников равны, а высота у ABP и APC общая, значит, равны и основания, BP = PC. Итак, у треугольников ABP и APC есть по две равных стороны, так как AP – общая. Тогда в силу равенства этих треугольников совпадают и третьи стороны, AC = AB. То есть исходный треугольник равнобедренный.

*A*

*B*

*C*

*P*

*Q*

Если Коля делал разрез по той же медиане, то у него получились такие же треугольники, как у Пети. Если по другой, например, BQ, аналогично получаем, что AB = BC, то есть исходный треугольник равносторонний и все его половинки совпадают.

*Замечание*. Если не доказано, что разрез проходит по медиане, то необходимо проверять все варианты наложения треугольников ABP и APC.

Возможны и другие решения, например, показать, что тупой угол APC не может совпадать ни с одним из углов треугольника ABP, так что условиям удовлетворяет только случай AP ⊥ BC

**Критерии.** Указано, что разрез идет по медиане – 2 балла. За полное решение задачи 7 баллов. Разбор только частных случаев равенства двух треугольников – 0 баллов.

**11-3**. Две окружности α и β касаются внутренним образом в точке A. Через точку M окружности α проведена хорда MN, касающаяся окружности в точке B. Прямая AB пересекает окружность α в точке T (отличной от A). Докажите, что MT = NT.

**Решение.** Проведём через точку A общую касательную AE к окружностям и пусть E — точка пересечения прямых MN и AE(см. рисунок). Введём обозначения для углов: ∠TNM = x, ∠TMN = y и ∠MNA = z.



*x*

*y*

*y*

*x*

*z*

Вписанные углы TАM и TNM опираются на одну и ту же дугу МТ, поэтому ∠TAM = ∠TNM = *х*; аналогично ∠ТАN = ∠TMN = y. По теореме о внешнем угле треугольника ∠ABE = z + y. Заметим, что угол МАЕ между касательной и хордой также равен z, поэтому ∠ЕАВ = z + x.

Отрезки касательных ЕА и ЕВ к окружности β равны, поэтому треугольник АЕВ — равнобедренный, и значит, ∠ЕАВ = ∠ABE, то естьz + x= z + y ⇒ x = y. Значит, треугольник ТMN — равнобедренный, и MT = NT.

В случае AE ⎪⎢MN прямая AB проходит через центры окружностей α и β, и так как радиус в точке касания перпендикулярен касательной, AB ⊥ MN и AB делит MN пополам. Отсюда снова получается MT = NT.

**Критерии.** В решении не разобран случай AE ⎪⎢MN— 6 баллов. Полное решение задачи – 7 баллов.

**11-4**. Предположим, что шахматный конь ходит буквой “Г” но не на 2 и 1 клетки, а на n + 1 и n клеток. За какое наименьшее число ходов он попадет на соседнюю клетку, находясь на бесконечной доске?

**Ответ**. За 2n + 1 ход.

**Решение**. Заметим, что после каждого хода конь меняет цвет клетки. Так как соседняя клетка имеет противоположный цвет, коню придется сделать нечетное число ходов. Обозначим это число за 2k + 1. При каждом ходе конь будет сдвигаться вправо или влево на n или n + 1 клетку. Предположим, что вправо он сделал больше ходов (k + 1 или больше). Пусть L1 – суммарный сдвиг вправо, очевидно, что L1 ≥ n(k + 1). При этом влево он мог сделать k или меньше ходов. Если L2 – суммарный сдвиг влево, то L2 ≤ (n + 1)k.

После всех ходов он должен остаться на той же вертикали, поэтому L1 = L2. Получим n(k + 1) ≤ (n + 1)k, откуда k ≥ n.

Пример с k = n легко построить: сдвигаемся за первые два хода на 1 клетку по диагонали. Повторив эту пару ходов n раз, окажемся на расстоянии n клеток по диагонали от исходной. Последним, 2n + 1-м ходом, становимся на соседнюю к исходной клетку.

**Критерии**. Только пример ходов коня – 0 баллов. Указание, что число ходов нечетно – 1 балл. Оценка для k без приведения примера – 5 баллов. Полное решение задачи – 7 баллов.

**11-5**. Найти наибольшее и наименьшее значения функции sin2x + 10 sin x cos x – 23 cos2x.

**Ответ**: 2 и –24.

**Решение**. Понизим степени слагаемых. Выражение примет вид

Сумму последних двух слагаемых можно переписать в виде

Здесь  – угол, такой, что cos  = 5/13; sin  = 12/13. Это выражение принимает значения от –13 до 13, откуда и получаем ответ.

**Критерии.** Получена формула (1) – 2 балла. Полное решение – 7 баллов.